

التحليل الإحصائي للعملية البواسونية غير المتجانسة مع تطبيق

د. باسل يونس ذنون الخياط^(١)

د. مثنى صبحي سليمان^(٢)

الملخص

تُعد دراسة العمليات البواسونية غير المتجانسة من الأمور المهمة لارتباطها بالحالات أو الظواهر الواقعية والتي يكون فيها المعدل الزمني لحدوث الحوادث يتغير بتغير الزمن (أي دالة بدلالة الزمن t). وقد تم استخدام الدالة الأسية لوصف العملية البواسونية غير المتجانسة كمعدل زمني لحدوث الحوادث، وتقدير معالماتها باستخدام طريقة الإمكان الأعظم. وتتضمن الدراسة أيضاً تطبيقاً واقعياً يتناول الأمطار اليومية الساقطة في محطات الأنواء الجوية في محافظة نينوى. وتم إجراء تحليل إحصائي لهذه الظاهرة الحيوية وتقدير المعدل اليومي لسقوط الأمطار في كل محطة من المحطات قيد الدراسة.

Abstract

The subject of the non-homogenous Poisson process is one of the important subjects because it is attached to actual phenomena in which the rate of occurrence of events changes according to time (function of time t). The rate of occurrence of events which has been used is the exponential function, and its estimation parameter is done using maximum likelihood method. The present study contains a real application that deals with the daily raining in the weather forecasting stations of Neneva. A statistical analysis to this vital phenomenon has been performed and the rate of daily rainfall has been estimated in each station.

(١) أستاذ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل.

(٢) مدرس، قسم علم الحاسوب، كلية الحداثة الجامعة.

١. المقدمة Introduction :

إنَّ التحليل الإحصائي للعملية النقطية يعني تحليل الاتجاه (Trend Analysis) للمعدل الزمني لحدوث الحوادث. ويُعد هذا التحليل من الأمور المهمة والحيوية عند دراسة سلوك مثل هذه العمليات. إن الهدف الرئيس من التحليل الإحصائي يتمثل بصياغة الشكل أو الاتجاه الذي ستؤول إليه العملية التصادفية، يضاف إلى ذلك اختبار حقيقة الاتجاه الذي ستسلكه العملية من خلال اختبار فرضية عدم القائلة بعدم وجود اتجاه عام للعملية. أما الهدف الثاني من التحليل الإحصائي فهو لمعالجة استقرارية (Stationarity) العملية وذلك باستخدام بعض الاختبارات للكشف بشكل دقيق عن نوع الاتجاه الذي تسلكه العملية.

٢. العملية البواسونية غير المتجانسة Non-Homogeneous Poisson process :

إنَّ حدوث الحوادث في العملية البواسونية الاعتيادية يكون بشكل عشوائي خلال فترة زمنية معينة بنسبة حدوث ثابتة λ من الحوادث لكل وحدة زمنية، في حين إن النسبة التي تحدث عندها الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة تتغير بتغير الزمن، وتُسمى بالمعدل الزمني للحدوث (Rate of Occurrence) أو يطلق عليها دالة الشدَّة (Intensity Function) ويرمز لها بالرمز $\lambda(t)$.

إنَّ العملية البواسونية $\{N(t) ; t \geq 0\}$ تتبع توزيع بواسون بدالة كتلة احتمال :

$$P[N(t) = n] = \frac{[m(t)]^n e^{-m(t)}}{n!}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

إذ إنَّ $m(t)$ تمثل معلمة العملية (المعدل)، وهي الدالة التراكمية للمعدل الزمني للحدوث (Cumulative Rate of Occurrence)، وتعرّف بالصيغة الآتية [Burr, 1994]:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u) du, \quad t > 0. \quad (2)$$

فإذا كانت $\lambda(t)$ هي كمية ثابتة لكل قيم t (أي إنَّ $m(t)$ خطية في t) فإن العملية $\{N(t) ; t \geq 0\}$ هي عملية بواسونية متجانسة (Homogeneous Poisson Process) بنسبة حدوث λ . أما إذا كانت $\lambda(t)$ متغيره، أي إنها تتغير بتغير الزمن، فإن العملية $\{N(t) ; t \geq 0\}$ هي عملية بواسونية غير متجانسة (Non-Homogeneous Poisson Process).

[Leemis, 1991]، ويكون توزيع الفترات بين حدوث الحوادث يتبع التوزيع الأسّي (Exponential Distribution) بدالة كثافة احتمال:

$$f(t) = \lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(u)du}, \quad t > 0. \quad (3) \dots\dots$$

٣. الدراسات السابقة للمعدل الزمني للحدوث في العملية البواسونية غير المتجانسة:
إن النماذج المختلفة من العمليات البواسونية غير المتجانسة يتحدد شكلها باختلاف الدوال التراكمية للمعدل الزمني للحدوث $m(t)$ والمعرّف في العلاقة (2). وبناءً على ذلك فإننا نلاحظ أنّ هنالك اقتراحات عديدة من قبل العديد من الباحثين في تحديد شكل المعدل الزمني للحدوث واختيار الدالة الملائمة التي يعتمد اختيارها على نوع البيانات قيد الدراسة.

فقد اقترح الباحث [Duane, 1964] دالة وايبيل (Weibull Function) للمعدل الزمني للحدوث وذلك لدراسة بيانات فشل الأنظمة المختلفة في أثناء برامج تنميتهم.
واقترح الباحثان [Cox and Lewis, 1966, 40] دالة لاختيائية (أسية) كمعدل زمني للحدوث. واستخدم الباحثان [Goel and Okumoto, 1979] دالة التوزيع الأسّي كمعدل زمني للعدد المتوقع لفشل البرامج في فترة زمنية معينة.
وفي بحث [Ozaki, 1981] تم اقتراح أنموذجاً لاختيائية لنمذجة الأمطار ودراسة منسوب الأنهار كعملية بواسونية غير متجانسة وبمعدل زمني للحدوث أُسيّاً كما يأتي:

$$\lambda(t) = e^{\{\alpha + k \sin(wt + \theta)\}}$$

وفي بحث [Goel, 1983] تم استخدام توزيع وايبيل (Weibull distribution) كمعدل زمني للحدوث. وهذه الدالة تُعد تعميماً لدالة التوزيع الأسّي وكذلك لدالة دوان للمعدل الزمني للحدوث.

كما تم اقتراح أنموذجاً عاماً للمعدل الزمني لحدوث الحوادث في بحث [Lee et al., 1991] يستخدم فيه دالة متعدد الحدود الأسّي المثلثي

(Exponential Polynomial Trigonometric Function). أما في بحث [Massey et al., 1996] تم استخدام دالة خطية كمعدل زمني للحدوث.

٤. تقدير معلمة العملية البواسونية غير المتجانسة:

Parameter Estimation of Non-Homogeneous Poisson Process

لو فرضنا أن العملية النقطية $\{N(t) ; t \geq 0\}$ تمثل عملية بواسونية غير متجانسة بالفترة $(0, t_0]$ وبمعدل زمني للحدوث $\lambda(t)$ معرف على وفق الصيغة الآتية:

$$\lambda(t) = e^{(a+bt)}, \quad t > 0 \quad \dots\dots (4)$$

إن a, b هما معلمتا المعدل الزمني للحدوث للعملية البواسونية غير المتجانسة. إن تقدير المعدل الزمني للحدوث للعملية البواسونية غير المتجانسة المتمثلة بالصيغة الأسية يعني تقدير معلمتي هذه الصيغة وهما a و b . كما هو معلوم فهناك عدة طرائق للتقدير، ولكن من أكثر هذه الطرائق استخداماً هي طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method).

لو فرضنا أن الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة تحدث ضمن الفترة

$$(0, t_0] \text{ في الأزمنة الآتية : } t_1, t_2, \dots, t_n$$

$$0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t_0 \quad \text{إن :}$$

وعليه فإن الدالة التراكمية للمعدل الزمني للحدوث، التي تمثل معلمة العملية البواسونية غير المتجانسة المعرفة في الصيغة (2)، عندما يكون المعدل الزمني للحدوث معرفاً بالعلاقة (4) ستكون بالشكل الآتي:

$$m(t) = e^a (e^{bt_0} - 1) / b \quad \dots\dots (5)$$

إن دالة الإمكان في العملية البواسونية غير المتجانسة $\{N(t) ; t \geq 0\}$ وبالمعلمة

$\lambda(t)$ في الفترة $(0, t_0]$ معرفة بالصيغة الآتية [Basawa and Prakasa, 1980, 103] :

$$L = \prod_{i=0}^{N(t_0)} \lambda(t_i) e^{-\int_0^{t_0} \lambda(u) du} \quad \dots\dots (6)$$

وعليه فإن الصيغة (٦) تصبح بالشكل الآتي:

$$L = e^{(na+b\sum_{i=1}^n t_i)} \exp[-e^a(e^{bt_0}-1)/b] \quad \dots\dots (7)$$

ومن العلاقة (٧) يمكن إيجاد مقدّر الإمكان الأعظم للمعلمة a عندما تكون b معلومة كما يأتي:

$$\hat{a} = \ln\left(\frac{nb}{e^{bt_0}-1}\right) \quad \dots\dots (8)$$

ويمكن الاستدلال على توزيع المعلمة b من خلال التوزيع الشرطي للمتغير $S=\sum t_i$ مشروطاً بعدد الحوادث n ، والسبب هو أنّ المشاهدات في دالة الإمكان للعملية البواسونية غير المتجانسة لا تأتي إلا من n و $\sum t_i$ فقط [Cox and Lewis, 1966, 46]. ولإيجاد مقدّر الإمكان الأعظم للمعلمة b فإننا نحتاج إلى إيجاد التوزيع الاحتمالي لها الذي يمثل التوزيع الشرطي للمتغير $S=\sum t_i$ مشروطاً بعدد الحوادث n ، كما في الصيغة الآتية:

$$f[S / N(t) = n] = \frac{n! \prod_{i=1}^n \lambda(t_i)}{[m(t_0)]^n} \quad ; n = 1, 2, 3 \dots \quad \dots\dots (9)$$

في العملية البواسونية غير المتجانسة ذات المعدل الزمني للحدوث موصوف بالدالة الأسية على وفق الصيغة (4)، فإن دالة الإمكان الشرطية للمعلمة b عندما تكون a ثابتة مشروطة بعدد الحوادث n هي كما يأتي:

$$L[b / N(t) = n] = \begin{cases} \frac{n! b^n e^{b \sum t_i}}{(e^{bt_0}-1)^n} & ; b \neq 0 \\ \frac{n!}{t_0^n} & ; b = 0 \end{cases} \quad \dots\dots (10)$$

إذ إنّ الصيغة (١٠) تجهزنا بدالة كثافة الاحتمال p.d.f. للإحصاءات المرتبة (Order Statistics) لعينة عشوائية بحجم n المأخوذة من مجتمع التوزيع الأسّي المبتور (Truncated Exponential Distribution) بالفترة الزمنية $(0, t_0]$ وذلك عندما $(b \neq 0)$. أما عندما $(b = 0)$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية تمثل التوزيع المنتظم (Uniform Distribution) بالفترة الزمنية $(0, t_0]$.

وبعد وجود مشاهدة واحدة فقط للعملية البواسونية غير المتجانسة ذات المعدل الزمني للحدوث $\lambda(t)$ الموصوف بالدالة الأسية، تكون دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي t بالشكل الآتي [Cox and Lewis, 1966, 46]:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{be^{bt}}{e^{bt_0} - 1} & ; b \neq 0 \\ \frac{1}{t_0} & ; b = 0 \end{cases}, 0 < t \leq t_0 \quad \dots\dots (11)$$

إن الصيغة السابقة تُجهزنا بالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي t ، ومن هذا التوزيع يمكن إيجاد مقدّر الإمكان الأعظم للمعلمة b وذلك بإتباع الخطوات الآتية:

لو فرضنا أن:

$$l(b) = \ln L(b) = \ln[f(t)]^n \quad \dots\dots(12)$$

وعليه فإن:

$$l(b) = \begin{cases} n \ln b - n \ln(e^{bt_0} - 1) + b \sum_{i=1}^n t_i + \ln(n!) & ; b \neq 0 \\ \ln(n!) - n \ln t_0 & ; b = 0 \end{cases} \quad \dots\dots (13)$$

ولو فرضنا أن مشتقة لوغاريتم دالة الإمكان الأعظم للمعلمة b بالنسبة للمعلمة b هي:

$$D_b l(b) = \frac{\partial l(b)}{\partial b}$$

وعليه فإن:

$$D_b l(b) = \begin{cases} \frac{n}{b} - \frac{nt_0}{(1 - e^{-bt_0})} + \sum_{i=1}^n t_i & ; b \neq 0 \\ -\frac{1}{2}nt_0 + \sum_{i=1}^n t_i & ; b = 0 \end{cases} \quad \dots\dots (14)$$

وكما هو معروف إحصائياً فإن مقدّر الإمكان الأعظم للمعلمة b يمكن إيجاده من خلال حل المعادلة الآتية:

$$D_b l(b) = 0 \quad \dots\dots (15)$$

ونلاحظ في هذه الحالة أنه لا يوجد حل جبري للمعادلة السابقة عندما $(b \neq 0)$ ، وعلى فقد تم استخدام الطرائق العددية (Numerical Methods) لإيجاد عدد من قيم b المقدرة. وإحدى الطرائق المستخدمة لحل معادلات الإمكان هي طريقة نيوتن (Newton's Method) [Silvey, 1975, 70]، والتي من خلالها تم الحصول على المقدّر الآتي:

$$\hat{b}_i = \hat{b}_{i-1} - \left[\frac{n}{\hat{b}_{i-1}} - \frac{nt_0}{(1 - e^{-\hat{b}_{i-1}t_0})} + \sum t_i \left[-\frac{n}{\hat{b}_{i-1}^2} - \frac{nt_0^2 e^{-\hat{b}_{i-1}t_0}}{(1 - e^{-\hat{b}_{i-1}t_0})^2} \right] \right]^{-1} \dots (16)$$

٥. اختبار معنوية معلمة العملية البواسونية غير المتجانسة:

Significant Test of Non-Homogeneous Poisson Process Parameter

كما هو معلوم فإن العملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بالدالة الأسية تعتمد على الزمن t ، وهذا الزمن مقترن بالمعلمة b كما هو واضح في الصيغة (4). وعلى اختبار فيما إذا كانت العملية البواسونية تعتمد على الزمن t (غير متجانسة) أم لا (متجانسة) فإنه يتم اختبار الفرضية الآتية:

$$\begin{aligned} H_0 : b &= 0 \\ H_1 : b &\neq 0 \end{aligned} \dots (17)$$

ويمكن إجراء اختبار إحصائي لاختبار فيما إذا كانت قيمة المعلمة b تساوي كمية معينة، ولتكن b_0 ، وذلك من خلال اختبار الفرضية الآتية:

$$\begin{aligned} H_0 : b &= b_0 \\ H_1 : b &\neq b_0 \end{aligned} \dots (18)$$

ويتم اختبار هذه الفرضية وذلك باستخدام المختبر الإحصائي الآتي:

$$Z = \frac{S - E\{S / N(t_0) = n\}}{\sqrt{\text{Var}\{S / N(t_0) = n\}}} \dots (19)$$

إن $S = \sum t_i$ وأن $t_1, t_2, \dots, t_n$ هي متغيرات توضيحية. وحسب مبرهنة الغاية المركزية (Center Limit Theorem) ولقيم n الكبيرة فإن المختبر الإحصائي Z في الصيغة (19) يتوزع توزيعاً طبيعياً بمعدل صفر وتباين واحد.

لو فرضنا أن المتغيرات التوضيحية $t_1, t_2, \dots, t_n$ تمثل أزمدة حدوث الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة، فإن:

$$E\{S / N(t_0) = n\} = nE(S_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots (20)$$

إذ إن $S = \sum t_i$ وعليه فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير S حسب الصيغة (١١) ستكون بالشكل الآتي:

$$f_S(s) = \begin{cases} \frac{be^{bs}}{e^{bt_0} - 1} & ; b \neq 0 \\ \frac{1}{t_0} & ; b = 0 \end{cases} \quad , \quad 0 < s \leq t_0 \quad \dots\dots (21)$$

ويمكن إيجاد معدل (القيمة المتوقعة) للمتغير S كما يأتي:

$$E(S) = \frac{t_0}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{1}{b} \quad \dots\dots (22)$$

وعليه فإن الصيغة (20) ستكون بالشكل الآتي:

$$E\{S / N(t_0) = n\} = \begin{cases} \frac{nt_0}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{n}{b} & ; b \neq 0 \\ \frac{nt_0}{2} & ; b = 0 \end{cases} \quad \dots\dots (23)$$

ومن المعادلة في أعلاه نلاحظ أن:

$$S - E\{S / N(t_0) = n\} = D_b l(b) \quad \dots\dots (24)$$

والذي يمثل بسط المختبر الإحصائي في الصيغة (19). أما مقام هذا المختبر فيمثل تباين المتغير S ، أي إن:

$$\begin{aligned} Var\{S / N(t_0) = n\} &= nVar(S_i) \\ &= E[-D_b^2 l(b)] \quad \dots\dots (25) \end{aligned}$$

والذي يمثل دالة المعلومات لفيشر (Fisher Information Function)، إذ إن هذه الدالة معرفة بالشكل الآتي:

$$I_b l(b) = E[-D_b^2 l(b)]$$

$$= \begin{cases} \frac{n}{b^2} - \frac{nt_0^2 e^{-bt_0}}{(1-e^{-bt_0})^2} & ; b \neq 0 \\ \frac{1}{12} nt_0^2 & ; b = 0 \end{cases} \quad \dots\dots (26)$$

وعليه فإن المختبر الإحصائي في الصيغة (19) والذي يختبر معنوية المعدل الزمني للحدوث لأية قيمة للمعلمة b يصبح بالشكل الآتي:

$$Z = \frac{D_b l(b)}{\sqrt{I_b l(b)}} \quad \dots\dots (27)$$

أي إن:

$$Z = \frac{\sum t_i + \frac{n}{b} - \frac{nt_0}{(1-e^{-bt_0})}}{\sqrt{\frac{n}{b^2} - \frac{nt_0^2 e^{-bt_0}}{(1-e^{-bt_0})^2}}}, \quad Z \sim N(0,1) \quad \dots\dots (28)$$

كما إن المختبر الإحصائي في الصيغة (19) يمكن أن يختبر تجانس العملية البواسونية وذلك عندما ($b=0$)، وعليه فإن هذا المختبر يصبح بالصيغة الآتية : [Basawa and Prakasa, 1980, 104]

$$Z = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} - \frac{t_0}{2}}{t_0 \sqrt{\frac{1}{12n}}} \quad \dots\dots (29)$$

وهذا المختبر يمكن استخدامه لكي يختبر الفرضية (١٧).

ونلاحظ من الصيغة (٢٩) أن المختبر يُقارن معدل زمن الحدوث ($\bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i / n$) مع

النقطة الوسطية (المركز) للفترة الزمنية $[0, t_0]$ ، أي مع النقطة $(t_0/2)$ ، وعليه عندما:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \cong \frac{t_0}{2}$$

فإن المختبر الإحصائي Z لا يُمكنه التقاط الاتجاه للعملية النقطية. في حين إذا كانت قيمة المختبر الإحصائي Z أكبر من الصفر (موجبة) فذلك يعطي مؤشراً إلى أنَّ الحادثة تقع فوق مركز الفترة الزمنية $(0, t_0]$ ، أي إنَّ المعدل الزمني للحدوث $\lambda(t)$ يزداد مع الزمن. أما إذا كانت قيمة المختبر الإحصائي Z أقل من الصفر (سالبة) فذلك يعطي مؤشراً إلى أنَّ الحادثة تقع تحت مركز الفترة الزمنية، أي إنَّ المعدل الزمني للحدوث $\lambda(t)$ يتناقص مع الزمن. إنَّ المختبر الإحصائي في الصيغة (29) يختبر الاتجاه العام وكذلك نوع العملية البواسونية في حالة العمليات البواسونية المنفردة. أما لو كان لدينا مجموعة من العمليات البواسونية المستقلة عددها m وبفترات زمنية مشاهدة مختلفة ، أي:

$$t_{01}, t_{02}, \dots, t_{0m}$$

وكانت عدد الحوادث المشاهدة في هذه العمليات هي على التوالي:

$$n_1, n_2, \dots, n_m$$

وإنَّ أزمناً حدوث الحوادث لهذه العمليات هي على التوالي:

$$t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im}$$

فإنه يمكن اختبار الاتجاه العام لكل العمليات البواسونية بشكل مشترك (Pooled test) في اختبار واحد. إنَّ فرضية العدم التي سيتم اختبارها في هذا الاختبار تنص على أنَّ العمليات النقطية جميعها قيد الدراسة تعود إلى العملية البواسونية نفسها. أما الفرضية البديلة فقبولها يعني أنَّ العمليات النقطية قيد الدراسة هي عمليات تعود إلى عمليات بواسونية منفردة وغير متجانسة وبمعدل زمني للحدوث $e^{(a+bt)}$. وقد أوصى الباحثان [Cox and Lewis, 1966, 48] استخدام المختبر الإحصائي التالي لهذا الغرض:

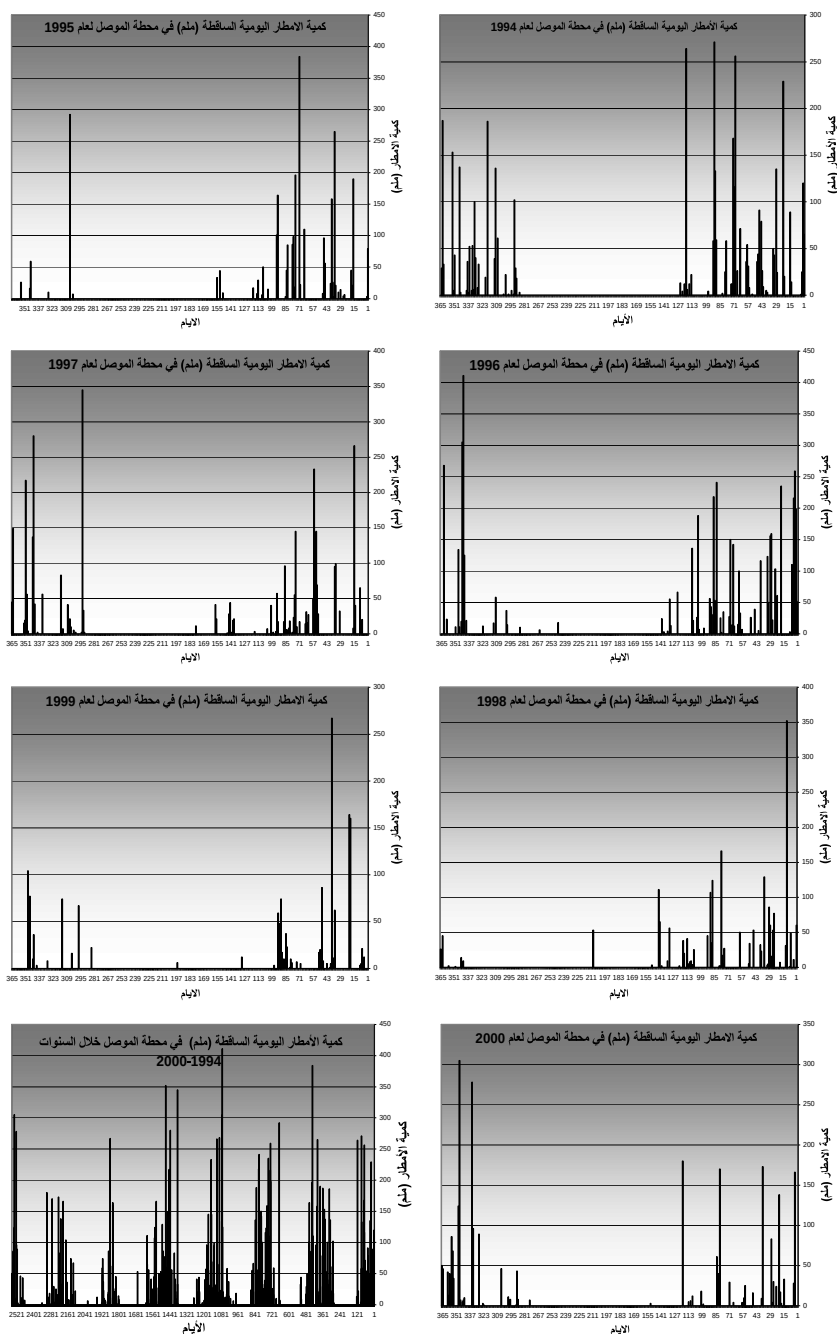
$$Z = \frac{(\sum t_{i1} + \sum t_{i2} + \dots + \sum t_{im}) - \frac{1}{2}(n_1 t_{01} + n_2 t_{02} + \dots + n_m t_{0m})}{\sqrt{\frac{1}{12}(n_1 t_{01}^2 + n_2 t_{02}^2 + \dots + n_m t_{0m}^2)}} \quad \dots (30)$$

٦. تطبيق عن الأمطار في محطات الأنواء الجوية في محافظة نينوى:

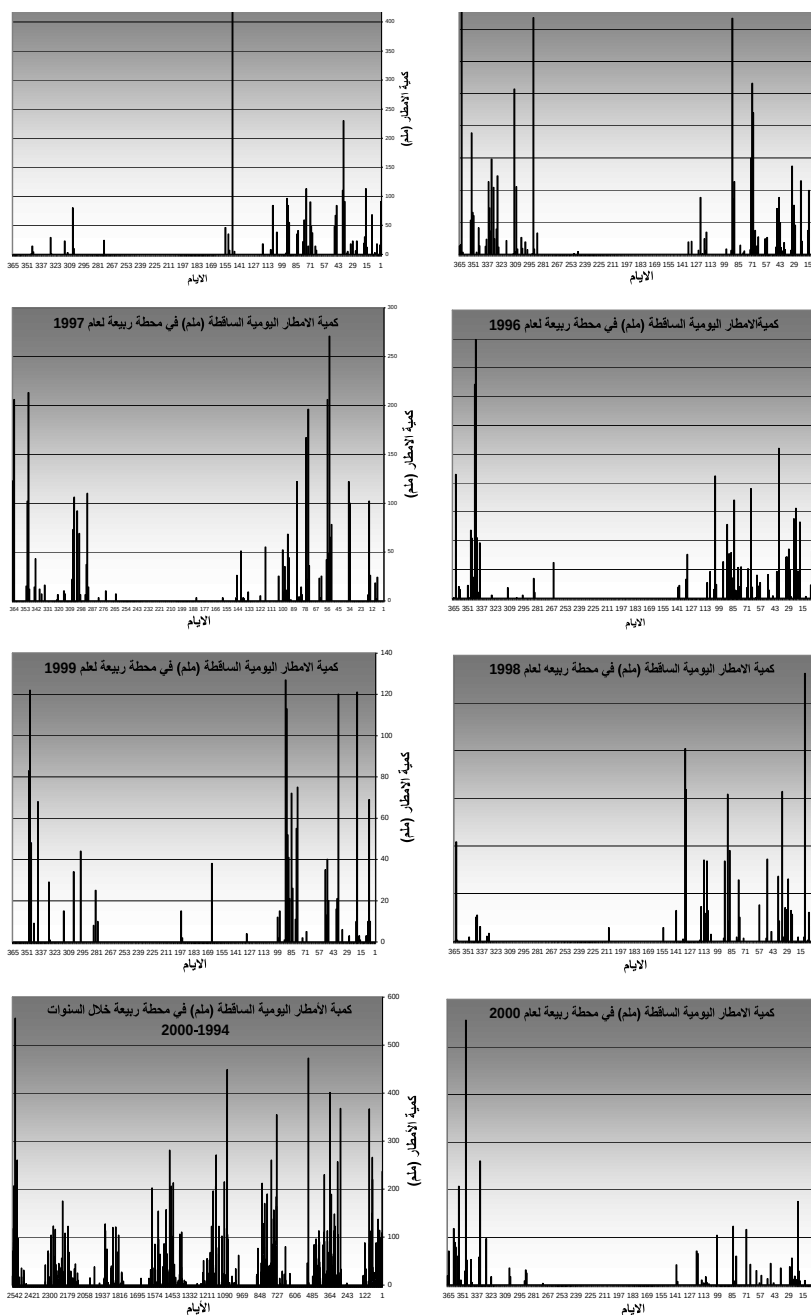
Application of Rainfall in the Weather Forecasting Stations of Neneva

كما هو معروف فإن محافظة نينوى تُعد من المناطق الزراعية المهمة في العراق، وإنَّ إنتاجها من الحنطة والشعير يعتمد اعتماداً شبيه تام على الأمطار. وكجانب تطبيقي لهذا البحث تم اختيار ظاهرة الأمطار في أربع محطات رئيسة للأنواء الجوية في محافظة نينوى وهي محطات الموصل وربيعة وتلعفر وسنّجار لدراسة المعدلات اليومية لسقوط الأمطار. لقد تم الحصول على بيانات يومية للأمطار المسجلة في هذه المحطات ولمدة سبع سنوات متتالية من عام 1994 ولغاية عام 2000 [سليمان، ٢٠٠٦]. وإنَّ السبب في اختيار هذه الفترة الزمنية هو أنَّها أقرب فترة متتالية ولا يوجد فيها أي انقطاع في التسجيل اليومي المطري (أي أنَّها تشكل مجموعة متكاملة من البيانات التاريخية).

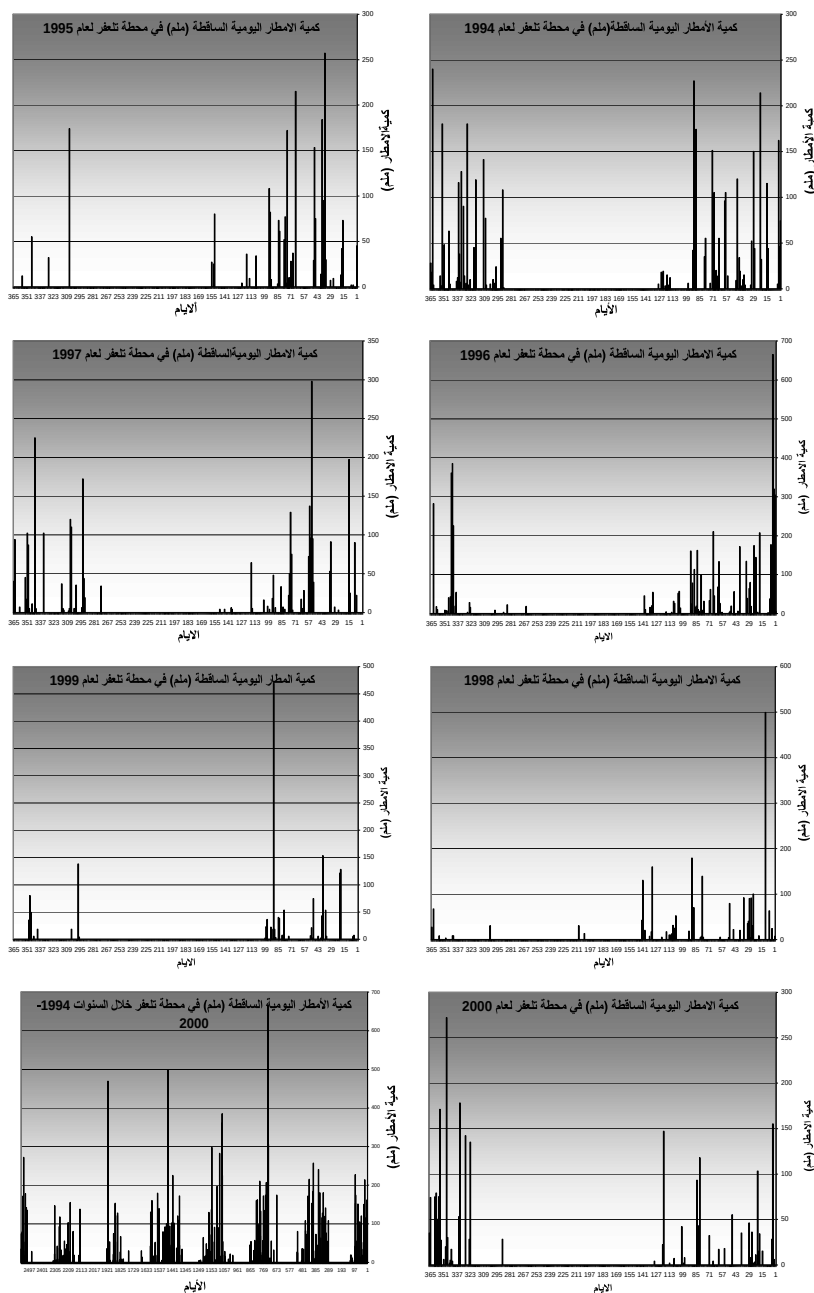
إنَّ الرسم الزمني للأمطار اليومية المسجلة في المحطات الأربع موضح في الشكل (١) لكل سنة على حدة وكذلك للسنين السبع مجتمعة ولكل محطة. ويبدو واضحاً منطقية النمذجة النقطية للأمطار. كما يُلاحظ موسميّة الأمطار فضلاً عن سلوكها الذي يبدو غير متماثل بين سنة وأخرى مما يُعد مؤشراً على أنَّ العمليات التصادفية قيد الدراسة تعتمد على الزمن (Time Dependent) في سلوكها، أي أنَّها عمليات غير متجانسة -Non-Homogeneous Processes).

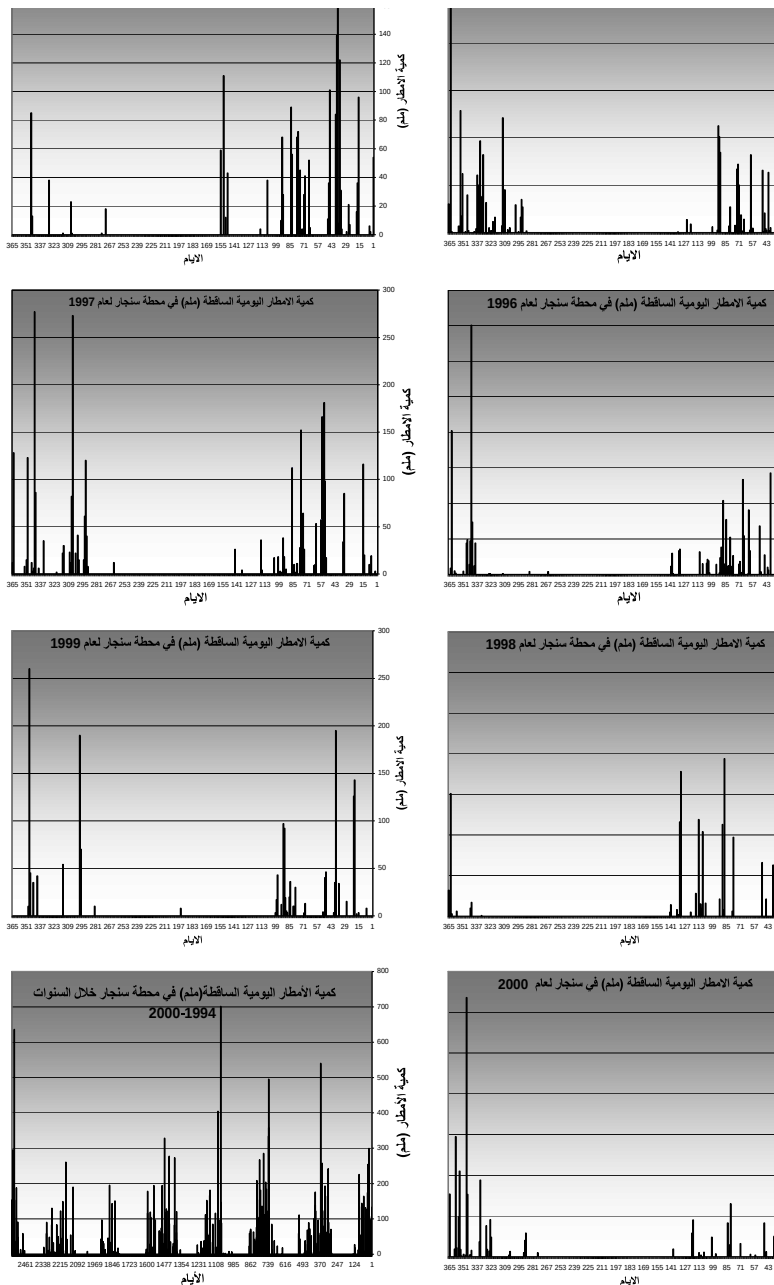


الشكل (1a): كمية الأمطار اليومية الساقطة (مم) في محطة الموصل.



الشكل (1b): كمية الأمطار اليومية الساقطة (مم) في محطة ربيعة.





الشكل (1d): كمية الأمطار اليومية الساقطة (مم) في محطة سنجار.

ولاختبار فيما إذا كانت العمليات قيد الدراسة هي عمليات متجانسة أم لا، فإننا نحتاج إلى افتراض معدل زمني للحدوث بشكل دالة تعتمد على الزمن وعلى وفق الصيغة الموضحة في المعادلة (4). ولاختبار تجانس العمليات الأربع يتم اختبار الفرضية الموضحة في الصيغة (١٧). وإنَّ المختبر الإحصائي الذي يختبر هذه الفرضية موضح في الصيغة (٢٩)، وقد تم الحصول على النتائج الآتية:

الجدول (1): نتائج اختبار تجانس العمليات الأربع.

المحطة	قيمة Z المحسوبة
الموصل	-1.7261
ربيعة	-1.9146
تلّعفر	-2.6106
سِنجار	-2.1822

ومن النتائج الموضحة في الجدول (١) نلاحظ أنَّ هنالك دلالة معنويّة واضحة على أنَّ العمليات المطريّة اليومية في كل من الموصل وربيعة و تلّعفر وسِنجار هي عمليات بواسونية غير متجانسة عند مستوى معنوية 8% . ولاختبار تجانس العمليات الأربع سوية فإنه يتم استخدام المختبر الإحصائي الموضح في الصيغة (٣٠)، إذ إنَّ فرضية العدم التي سيتم اختبارها في هذا الاختبار تنص على أنَّ كل العمليات النقطية للأمطار اليومية الساقطة في المحطات الأربع تعود إلى العملية البواسونية نفسها. أما الفرضية البديلة فقبولها يعني أن العمليات النقطية للأمطار اليومية الساقطة في المحطات الأربع هي عمليات تعود إلى عمليات بواسونية منفردة وغير متجانسة وبشكل منفصل عن بعضها البعض.

ومن المعلومات التي تم الحصول عليها فإنَّ القيمة المحسوبة للمختبر الإحصائي Z وعلى وفق الصيغة (٣٠) هي (-4.2077)، ونلاحظ أنَّ هنالك دلالة معنويّة واضحة على أن العمليات النقطية للأمطار اليومية الساقطة في المحطات الأربع هي عمليات بواسونية غير متجانسة عند مستوى المعنوية نفسه وبشكل منفصل عن بعضها البعض.

إنَّ القيمة السالبة للمختبر الإحصائي تشير إلى أنَّ المعدل اليومي لسقوط الأمطار يتناقص مع الزمن t ، أي إنَّ الأمطار الساقطة في المحطات الأربع في تناقص مستمر بمرور الزمن. ولتقدير الدالة الأسية التي تصف المعدل اليومي لسقوط الأمطار لكل محطة، فإننا نحتاج إلى تقدير معلمتي الدالة الأسية وهما المعلمتان a و b الخاصة بكل محطة. وفي ما يلي المعدلات اليومية لسقوط الأمطار الموصوفة بالدالة الأسية لكل محطة:

١- المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة الموصل:

$$\hat{\lambda}_1(t) = e^{-(2.1051+0.0001927t)} ; 0 < t \leq 2132$$

٢- المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة ربيعة:

$$\hat{\lambda}_2(t) = e^{-(2.0026+0.0002084t)} ; 0 < t \leq 2105$$

٣- المعدل اليومي لسقوط

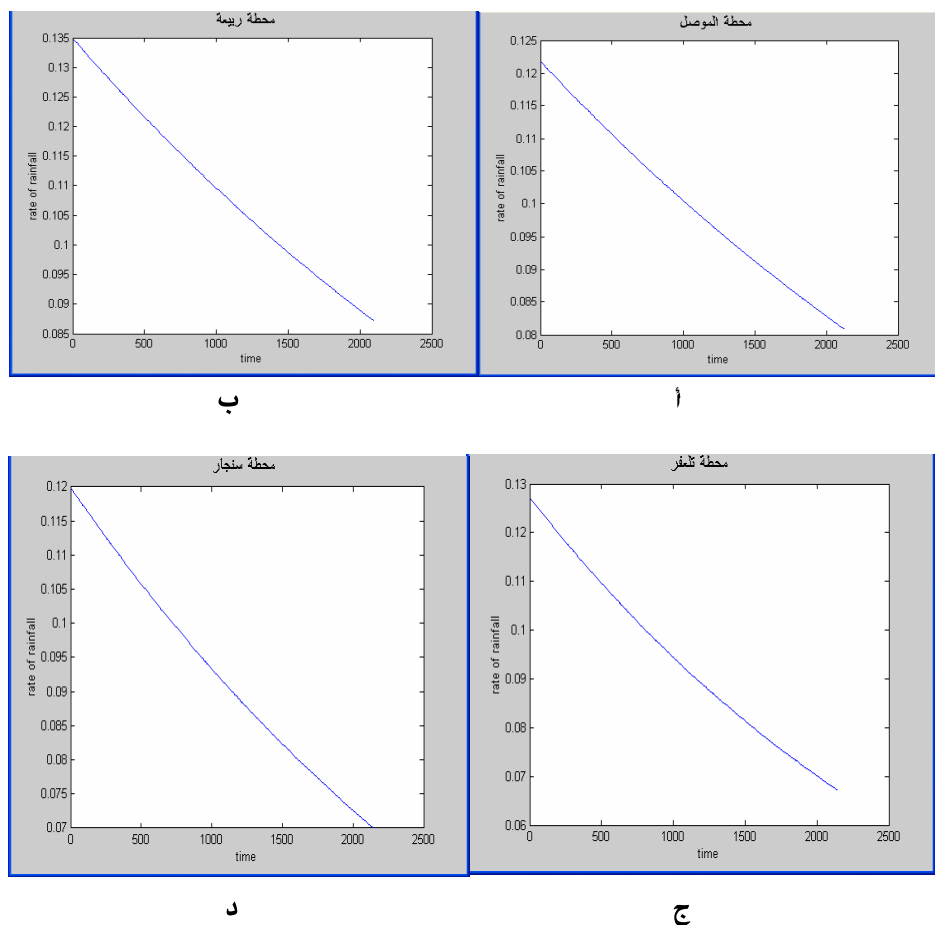
الأمطار في محطة تلعفر:

$$\hat{\lambda}_3(t) = e^{-(2.0617+0.0002979t)} ; 0 < t \leq 2150$$

٤- المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة سينجار:

$$\hat{\lambda}_4(t) = e^{-(2.1209+0.0002509t)} ; 0 < t \leq 2146$$

والشكل (2) يوضح منحنى دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار الموصوفة بالدالة الأسية لكل محطة من المحطات قيد الدراسة.



الشكل(2): المعدل اليومي لسقوط الأمطار في المحطات الأربع.

نلاحظ من الأشكال البيانية في أعلاه أنَّ المعدل اليومي لسقوط الأمطار يكون متشابهاً تقريباً بالشكل العام، وهذا يُعطي مؤشراً إلى أنَّ المعدل المطري في المحطات الأربع متقارب وذلك لتقارب المناطق قيد الدراسة من حيث الموقع الجغرافي. كما يُلاحظ من هذه الأشكال أنَّها تأخذ شكلاً مستقيماً تقريباً ولكن باتجاه التناقص، ممَّا يدل على أنَّ المعدل المطري في المحطات الأربع يتجه نحو التناقص بمرور الزمن. كما ويمكن إيجاد المعدل

اليومي لسقوط الأمطار للفترة قيد الدراسة، أي عندما $(t=t_0)$ ، ولكل محطة من المحطات الأربع، وكذلك إيجاد متوسط الزمن بين حدوث المطرات خلال الفترة قيد الدراسة من خلال الجدول الآتي:

الجدول (٢): المعدل اليومي لسقوط الأمطار ومتوسط الزمن بين حدوث المطرات للفترة قيد الدراسة ولكل محطة.

المحطة	المعدل اليومي لسقوط الأمطار (مطره/يوم)	متوسط الزمن بين حدوث المطرات (يوم)
الموصل	0.0871	11.4811
ربيعه	0.0961	10.4058
تلّعفر	0.0797	12.5471
سنّجار	0.0791	12.6422

٧. الاستنتاجات *Conclusions*:

- لقد تمّ التوصل إلى مجموعة من الاستنتاجات يمكن إجمالها بالنقاط الآتية:
- ١- إنَّ مشكلة عدم التجانس في العملية البواسونية يمكن معالجتها من خلال استخدام نموذج انحدار مناسب، له مُعلّمة مرتبطة بكل فترة زمنية، ويمثل هذا النموذج المعدل الزمني لحدوث الحوادث.
 - ٢- إنَّ اختيار الدوال المعلمية الشائعة، كالذّالة الأسّيّة (اللاخطيّة) كمعدل زمني للحدوث في العملية البواسونية غير المتجانسة يُعدّ من الأمور المقبولة وذلك لسهولة عملية تقدير معلّماتها، وخصوصاً عند استخدام طريقة الإمكان الأعظم.
 - ٣- من خلال التطبيق على الأمطار في محطات الأنواء الجوية في محافظة نينوى، لوحظ أنَّ العمليات النقطيّة للأمطار الساقطة على كل من محطات الموصل وربيعة وتلّعفر وسنّجار هي عمليات تعود إلى مجتمع العملية البواسونية غير المتجانسة وبشكل منفصل عن بعضها البعض وبشكل متناقص.

المصادر

١. سليمان، مثنى صبحي، (٢٠٠٦)، "التحليل الإحصائي للعملية البواسونية غير المتجانسة مع تطبيق"، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل.
2. Basawa, I. V., and Prakasa Rao, B. L. S. (1980), "**Statistical Inference for Stochastic Processes**". Academic Process, London.
3. Burr, D. (1994), "**On inconsistency of Breslow's estimator as an estimator of the hazard rate in the Cox model**". Biometrics 50, 1142-1145.
4. Cox, D. R., and Lewis, P. A. (1966), "**Statistical Analysis of Series of Events**". Chapman and Hall, London, United Kingdom.
5. Duane, J. T. (1964), "**Learning curve approach to reliability monitoring**". IEEE Transaction on Aerospace, As-vol(2), 563-566.
6. Goel, A. L. (1983). "**A guidebook for software reliability assessment**". Tech. Rep. RADC-TR-83-176.
7. Goel, A. L. and Okumoto, K. (1979), "**Time dependent error detection rate model for software reliability and other performance measures**". IEEE Transactions on Reliability, 28, 206-211.
8. Lee, S., Wilson, J.R. and Crawford, M. M. (1991), "**Modeling and simulation of a non homogeneous Poisson process having cyclic behavior**". Communications in Statistics-Simulation and Computation, 20(2&3), 777-809.
9. Leemis, L. M. (1991), "**Non parametric estimation of the cumulative intensity function for a non-homogeneous Poisson process**". Management Science, 37(7), 886-900.
10. Massey, W. A., Parker, G. A. and Whitt, W. (1996), "**Estimating the parameters of a non-homogeneous Poisson process with linear rate**". Telecommunication Systems, 5, 361-388.

11. Ozaki, T. (1981), "**Marked point process and non-linear systems modeling of daily rainfall and river flow time series in stochastic Hydrology**". University of Manchester Institute of Science and Technology.
12. Silvey, S. D. (1975), "**Statistical Inference**". Chapman and Hall, London.
13. Tong, H. (1985), "**Threshold Models of Time Series**". Springer, Verlag, New York.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.